Signaux et systèmes est la discipline qui, d'une manière générale, analyse les signaux et traite la commande des systèmes. Elle revêt donc un caractère très important dans le domaine industriel auquel elle apporte à la fois des solutions, des méthodes d'étude ainsi que des démarches systématiques d'analyse. Le lecteur y trouvera donc, séparés en plusieurs parties: systèmes à temps continu et à temps discret, représentation d'état. Par une approche pédagogique progressive. La présentation de cet ouvrage respecte l'ordre chronologique dans lequel la discipline est en général abordée et se compose de six parties correspondant aux thèmes essentiels couverts par l'automatique.

Chérif Aida a obtenue son HDR en Automatique en 2014, actuellement elle occupe le poste de Maître de conférences à l'Université Mohamed Bachir El Ibrahimi BBA, attachée au laboratoire LAS, Université de Sétif.

978-3-330-87741-2

ÉDITIONS
UNIVERSITAIRES
EUROPÉENNES



Aida Chérif

Signaux et systèmes: cours et exercices corrigés

Aida Chérif

Signaux et systèmes: cours et exercices corrigés

Aida Chérif

Signaux et systèmes: cours et exercices corrigés

Éditions universitaires européennes

Impressum / Mentions légales
Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.
Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Information bibliographique publiée par la Deutsche Nationalbibliothek: La Deutsche Nationalbibliothek inscrit cette publication à la Deutsche Nationalbibliografie; des données bibliographiques détaillées sont disponibles sur internet à l'adresse http://dnb.d-nb.de.
Toutes marques et noms de produits mentionnés dans ce livre demeurent sous la protection des marques, des marques déposées et des brevets, et sont des marques ou des marques déposées de leurs détenteurs respectifs. L'utilisation des marques, noms de produits, noms communs, noms commerciaux, descriptions de produits, etc, même sans qu'ils soient mentionnés de façon particulière dans ce livre ne signifie en aucune façon que ces noms peuvent être utilisés sans restriction à l'égard de la législation pour la protection des marques et des marques déposées et pourraient donc être utilisés par quiconque.

Coverbild / Photo de couverture: www.ingimage.com

Verlag / Editeur:
Éditions universitaires européennes
ist ein Imprint der / est une marque déposée de
OmniScriptum Publishing Group
Contact: ICS Morebooks! Marketing SRL, 4, Industriala street, 3100 Balti, Republic of Moldova / Moldavie
Email: info@omniscriptum.com

Herstellung: siehe letzte Seite /
Impression: voir la dernière page
ISBN: 978-3-330-87741-2

Copyright / Droit d'auteur © Aida Chérif
Copyright / Droit d'auteur © 2017 OmniScriptum Publishing Group
Alle Rechte vorbehalten. / Tous droits réservés. Saarbrücken 2017

SIGNAUX ET SYSTEMES

Sommaire

Avant-propos……....4

Chapitre I : Signaux à temps continu et discret

I.1 Définition……...…6
I.2 Classification des signaux……..…6
I.2.1 Classification phénoménologique…….…… .6
I.2.2 Classification énergétique……..……6
I.2.3 Classification morphologique…….…… ...6
I.2.4 Classification Symétrique…….……..7
I.2.5 Classification dimensionnelle……7
I.3 Signaux analogiques……..8
I.3.1 Quelques signaux analogiques communs…….……..8
I.3.2 Caractéristiques des signaux analogiques…….……..…....9
I.4 Signaux discrets…….…..11
I.4.1 Définitions……..……..11
I.4.2 Caractéristiques des signaux discrets……..…….……12
I.4.3 Signaux discrets communs…….……...…12

Chapitre II : Analyse des signaux analogiques et discrets

II.1 Traitement du signal analogique……....15
II.1.1 Représentation temporelle et fréquentielle d'un signal……....15
II.1.2 Série de Fourier……..……...……15
II.1.2.1 Définition…….……15
II.1.2.2 Coefficients de Fourier……...…..15
II.1.2.3 Symétrie et les coefficients de Fourier……....16
II.1.2.4 Formes alternatives de la série de Fourier……...……19
II.1.2.5 Spectre d'amplitude et de phase……...19
II.1.3 Transformée de Fourier……...……22
II.1.3.1 Définition……..22
II.1.3.2 Propriétés……..24
II.1.3.3 Théorème de Parseval……..24

II.2 Traitement du signal discret……...24
II.2.1 Transformé de Fourier discrète……..…….24
II.2.1.1 Définition……..24
II.2.1.2 Propriétés……..25
II.2.1.3 Théorème de Parseval……..25
Exercices sur le chapitre II ……..…….26

Chapitre III : Transformée de Laplace et systèmes analogiques

III.1 Systèmes à temps continu…….31
III.1.1 Définition……...31
III.1.2 Linéarité…….31
III.1.3 Convolution……...…….32
III.2 La transformée de Laplace……33
III.2.1 Définition de la transformée de Laplace……..……..33
III.2.2 Propriétés……...35
III.3 Transformées inverses……...35
III.4 Théorème de la valeur initiale et valeur finale……..36
III.5 Fonction de transfert…….37
Exercices sur le chapitre III……..…….38

Chapitre IV : Transformée en Z et systèmes numériques

IV.1 Systèmes discrets……..42
IV.2 Transformée en Z……..42
IV.2.1 Définition……...42
IV.2.2 Transformée en Z des signaux élémentaires……..42
IV.2.3 Propriétés de la transformée en *z*……...43
IV.3 Théorème de la valeur initiale et finale ……....43
IV.4 Equations récurrentes ……...……43
IV.5 Fonction de transfert échantillonnée……...…….44
IV.5.1 Diagramme des pôles et zéros……...44
IV.5.2 Réponse d'un système……..….44
IV.5.3 Stabilité……..……44
IV.6 Transformée en *z* inverse…….…….45
IV.7 Transformée unilatérale……...….45
IV.8 Réponse en fréquence……...……46

IV.9 La transformée en *z* et l'analyse de systèmes……...…46
IV.9.1 Systèmes définis par une équation aux récurrences……...…47
IV.9.2 Systèmes définis par une fonction de transfert……..……47
Exercices sur le chapitre IV……..48

Chapitre V : Modèles d'espace d'état en temps continu et discret

V.1 Représentation d'état des systèmes continus…….53
V.1.1 Définitions……..…….53
V.1.2 variables d'état……..……..53
V.1.3 Modélisation des systèmes linéaires….....53
V.1.4 Commandabilité d'un système……..……..54
V.1.5 Observabilité de l'état d'un système……..…….55
V.1.6 Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert d'un système……..…56
V.2 Représentation d'état des systèmes à temps discret……..…….57
V.2.1 Définition……57
V.2.2 Passage de l'équation différentielle à la représentation d'état……..…..58
V.2.3 Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert en z…….....……59
V.2.4 Solution de l'équation d'état discrète……...……...59
V.2.5 Commandabilité d'un système à temps discret……...……....59
V.2.6 Observabilité de l'état d'un système……..…….60
Exercices sur le chapitre V……..……..61
Bibliographies……...64

Avant-propos

Signaux et systèmes est la discipline qui, d'une manière générale, analyse les signaux et traite la commande des systèmes. Elle revêt donc un caractère très important dans le domaine industriel auquel elle apporte à la fois des solutions, des méthodes d'étude ainsi que des démarches systématiques d'analyse.

Ce document couvre l'étendue de ces méthodes et correspond globalement aux programmes de master I électromécanique de département électromécanique. Le lecteur y trouvera donc, séparés en plusieurs parties : analyse des signaux à temps continu et discret, systèmes à temps continu et à temps discret, représentation d'état. Par une approche pédagogique progressive.

La présentation de cet ouvrage respecte l'ordre chronologique dans lequel la discipline est en général abordée et se compose de six parties correspondant aux thèmes essentiels couverts par l'automatique.

La première partie concerne l'étude des signaux analogiques et numériques. Deux chapitres sont consacrés à cette partie. Le chapitre I contient l'ensemble des notions essentielles à l'étude générale des signaux. L'analyse des signaux avec la série de Fourier et leur transformation pour les deux cas discret et continu montrer avec la deuxième chapitre.

Le chapitre III est consacrée aux méthodes de base de la modélisation des systèmes linéaires continus. Elle contient l'ensemble des notions essentielles à l'étude générale de l'automatique.

Le chapitre IV est consacrée à une branche essentielle des systèmes : les systèmes à temps discret. Toutes les notions présentées permettront à l'étudiant d'acquérir la maîtrise d'une discipline qui joue un rôle croissant dans le développement industriel de l'automatique.

Le chapitre V aborde la représentation d'état des systèmes, partie beaucoup plus moderne de l'automatique qui permet, grâce à des modélisations différentes de celles abordées jusqu'alors, d'appréhender des systèmes plus complexes et de fournir des méthodes d'études et des réponses scientifiques et technologiques plus précises aux problèmes généraux liés à l'automatique des systèmes réels.

Dans l'ensemble de ce document, nous avons choisi de détailler tous les développements théoriques de manière simple permettant au l'étudiant d'accéder rapidement à une meilleure compréhension de la discipline.

Chapitre I

Signaux à temps continu et discret

I.1 Définition

Un signal est une quantité mesurable qui dépend du temps. Un *signal* est la représentation physique de l'information, qu'il convoie de sa source à son destinataire.

Exemples :

- Onde acoustique : courant délivrer par un microphone (parole, musique, …)
- Tension aux bornes d'un condensateur en charge
- Images
- Vidéos
- Position d'un mobile M(t) ou M(x, y,t).

I.2 Classification des signaux

On peut envisager plusieurs modes de classification pour les signaux suivant leurs propriétés.

I.2.1 Classification phénoménologique

On considère la nature de l'évolution du signal en fonction du temps. Il apparaît deux types de signaux :

- **Les signaux déterministes :** ou signaux certains, leur évolution en fonction du temps peut être parfaitement modélisé par une fonction mathématique. On retrouve dans cette classe les signaux périodiques, les signaux transitoires, les signaux pseudo-aléatoires, etc…
- **Les signaux aléatoires :** leur comportement temporel est imprévisible. Il faut faire appel à leurs propriétés statistiques pour les décrire. Si leurs propriétés statistiques sont invariantes dans le temps, on dit qu'ils sont stationnaires.

I.2.2 Classification énergétique

On considère l'énergie des signaux. On distingue :

- **Les signaux à énergie finie :** il possède une puissance moyenne nulle et une énergie finie.
- **Les signaux à puissance moyenne finie :** il possède une énergie infinie et sont donc physiquement irréalisable.

I.2.3 Classification morphologique

On distingue les signaux à variable continue des signaux à variable discrète ainsi que ceux dont l'amplitude est discrète ou continue.

On obtient donc 4 classes de signaux :

- **Les signaux analogiques** dont l'amplitude et le temps sont continus
- **Les signaux quantifiés** dont l'amplitude est discrète et le temps continu
- **Les signaux échantillonnés** dont l'amplitude est continue et le temps discret
- **Les signaux numériques** dont l'amplitude et le temps sont discrets

I.2.4 Classification Symétrique

Il y a quatre types de symétrie :

1. Symétrie paire
2. Symétrie impaire
3. Symétrie demi-onde
4. Symétrie quart-d'onde

Symétrie paire

Une fonction est dite paire si :

$f(t)=f(-t)$

C'est-à-dire qu'on peut faire une copie miroir autour de l'axe y.

Symétrie impaire

Une fonction est dite impaire si :

$f(t)= -f(-t)$

C'est-à-dire qu'on peut faire une copie miroir autour de l'axe y puis une copie miroir autour de l'axe x.

Symétrie demi-onde

Une fonction périodique possède de la symétrie demi-onde si:

$f(t)= -f(t-T/2)$

C'est-à-dire que si on déplace la fonction d'une demi-période, puis on l'inverse (rotation autour de l'axe x) et alors que cette nouvelle fonction est identique à l'originale, il y a symétrie demi-onde.

Symétrie quart-d'onde

Le terme symétrie quart-d'onde décrit une fonction périodique qui a la symétrie demi-onde mais aussi de la symétrie autour du point milieu entre les demi-cycles positifs et négatifs.

I.2.5 Classification dimensionnelle

- Signal monodimensionnel 1D.
- Signal bidimensionnel 2D
- Signal tridimensionnel 3D

I.3 Signaux analogiques

I.3.1 Quelques signaux analogiques communs

I.3.1.1 Fonction signe

$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} -1 & \text{pour } t < 0 \\ +1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

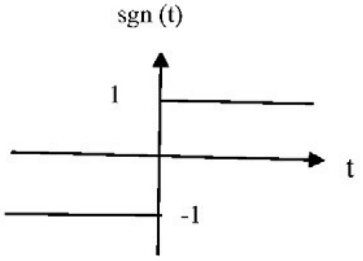


Figure I.5 : Fonction signe

Par convention, on admet pour valeur à l'origine : sgn(t) =0 pour t=0.

I.3.1.2 Fonction échelon

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

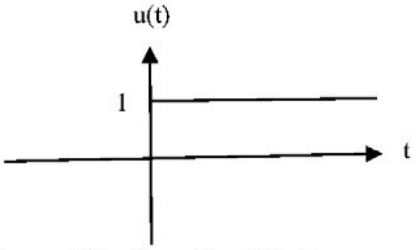


Figure I.6 : Fonction échelon

I.3.1.3 Fonction rampe

$$r(t) = t.u(t)$$
$$= \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau$$

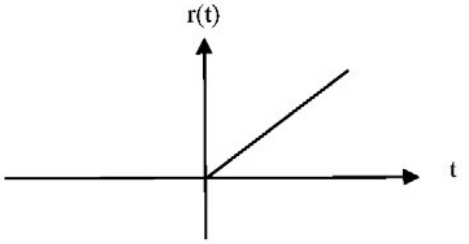


Figure I.7 : Fonction rampe

I.3.1.4 Fonction rectangulaire

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour} \quad \left|\frac{t}{T}\right| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{pour} \quad \left|\frac{t}{T}\right| > \frac{1}{2} \end{cases}$$

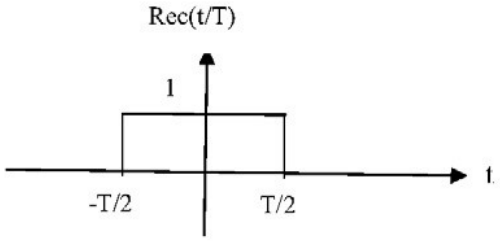


Figure I.8 : Fonction rectangulaire

On l'appelle aussi fonction porte.

1.3.1.5 Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac correspond à une fonction porte dont la largeur T tendrait vers 0 et dont l'aire est égale à 1.

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{pour} \quad t = 0 \\ 0 & \text{pour} \quad t \neq 0 \end{cases}$$

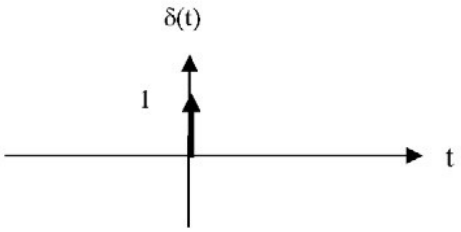


Figure I.9 : Fonction impulsion de Dirac.

1.3.1.6 Fonction « Triangle »

La fonction triangle prend les valeurs

$$tri(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{pour } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

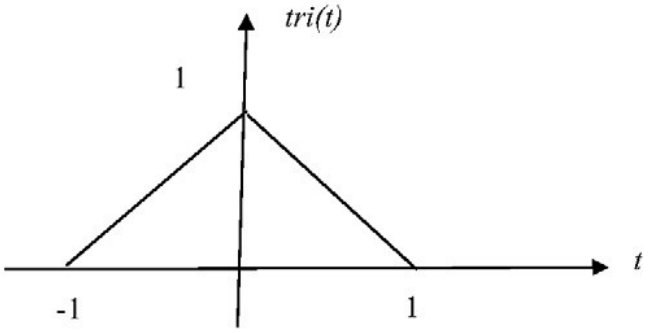


Figure I.10 : Fonction triangle.

I.3.2 Caractéristiques des signaux analogiques

On verra ici quelques caractéristiques les plus communes des signaux, comme la valeur moyenne, l'énergie et la puissance.

1.3.2.1 Valeur moyenne

La valeur moyenne d'un signal $x(t)$ périodique est obtenue selon :

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt$$

1.3.2.2 Valeur efficace

La valeur efficace (ou RMS en anglais, *Root Mean Square*) est une mesure très utile dans le calcul de puissance. C'est une mesure de l'amplitude d'un signal variable. La définition est :

$$\mathrm{x}_{rms} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt}$$

C'est la racine carrée de la valeur moyenne du signal au carré.

Exemple

Calculer la valeur efficace du signal

$x(t) = A\cos(\omega t)$

Il faut tout simplement appliquer la définition :

$$x_{rms}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)^2 dt = \frac{1}{T}\int_0^T A^2 cos^2(\omega t)dt$$

$$= \frac{A^2}{T}\int_0^T \frac{1}{2}(1 + \cos(2\omega t)dt = \frac{A^2}{2}$$

Donc, la valeur efficace est :

$$x_{rms} = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

1.3.2.3 Energie et puissance

L'énergie d'un signal est :

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

La puissance normalisée d'un signal est la moyenne dans le temps de l'énergie. Si $x(t)$ est périodique avec une période T, la puissance du signal est l'énergie moyenne par période :

$$P = \frac{1}{T}\int_{T} |x(t)|^2$$

Où on fait l'intégrale sur n'importe quelle période.

I.4 Signaux discrets

I.4.1 Définitions

Dans la réalité industrielle, la complexité des systèmes, ainsi que celle des traitements à réaliser, nécessite souvent le recours à des outils numériques de traitement : ordinateurs, calculateurs, systèmes numériques en tout genre.

Un signal discret ou échantillonné $x[k]$ est une séquence ordonnée de valeurs correspondant à un index entier k qui représente l'histoire en fonction du temps du signal.

Le signal discret ne donne aucune information quant à l'intervalle d'échantillonnage t_s, le temps entre chaque échantillon du signal. Un signal discret est tracé en fonction de l'échantillon k et non en fonction du temps. Pour représenter l'origine du signal, le point où $k = 0$, on utilise une flèche soit au-dessus ou au-dessous du chiffre correspondant à k=0. Ex:

$$x[k] = \{1, 2, 4, 8, \ldots.\}$$

La figure I.10 montre un exemple de signal discret.

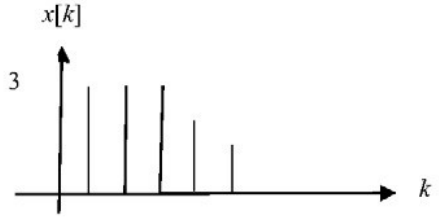


Figure I.10: Exemple de signal discret.

Un signal discret périodique se répète à tous les N échantillons, et est décrit par :

$$x[k] = x[k \pm nN] \qquad \text{où} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \ldots$$

La période *N* est le plus petit nombre d'échantillons qui se répètent. La période d'un signal discret est toujours un entier.

I.4.2 Caractéristiques des signaux discrets

Pour un signal périodique, la valeur moyenne x_{av} et la puissance *P* sont définis selon

$$x_{av} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[k]$$

$$P = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} |x[k]|^2$$

L'énergie d'un signal est :

$$E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2$$

Exemple

Calculer la valeur moyenne et la puissance d'un signal périodique

$x[k] = 6\cos(2\pi k/4)$ de période $N = 4$.

Une période de ce signal est (k = 1, 2, 3, 4) :

$x_1[k] = \{6, 0, -6, 0\}$

La valeur moyenne est :

$$x_{av} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} x[k] = \frac{1}{4}(6 + 0 - 6 + 0) = 0$$

et la puissance est :

$$P = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} |x[k]|^2 = \frac{1}{4}(36 + 0 + 36 + 0) = 18W$$

I.4.3 Signaux discrets communs

On retrouve les mêmes signaux communs en temps discret qu'en temps continu, soit l'impulsion, l'échelon et la rampe. L'impulsion, par définition, est :

$$\delta[\mathrm{k}] = \begin{cases} 1 & \text{pour } \mathrm{k} = 0 \\ 0 & \text{pour } \mathrm{k} \neq 0 \end{cases}$$

La fonction échelon discrète est :

$$\mathrm{u}[\mathrm{k}] = \begin{cases} 0 & \text{pour } \mathrm{k} < 0 \\ 1 & \text{pour } \mathrm{k} \geq 0 \end{cases}$$

La fonction rampe est :

$$\mathrm{r[k]} = \begin{cases} 0 & \text{pour } \mathrm{k} < 0 \\ k & \text{pour } \mathrm{k} \geq 0 \end{cases}$$

Quelques autres fonctions utiles sont les fonctions rect et tri. La fonction rect(n/2N) représente un pulse centré à l'origine, de largeur totale 2*N*.

$$\mathrm{rect}\left(\frac{\mathrm{k}}{2\mathrm{N}}\right) = \begin{cases} 1 & \text{pour } |k| < N \\ 0 & \text{pour ailleurs} \end{cases}$$

La fonction tri crée un triangle d'amplitude maximale 1 centré à l'origine, de largeur totale à la base de 2*N*.

$$\mathrm{tri}\left(\frac{\mathrm{k}}{2\mathrm{N}}\right) = \begin{cases} 1 - \dfrac{|k|}{N} & \text{pour } |k| < N \\ 0 & \text{pour ailleurs} \end{cases}$$

Chapitre II

Analyse des signaux analogiques et discrets

II.1 Traitement du signal analogique

II.1.1 Représentation temporelle et fréquentielle d'un signal

Un signal peut être associé à deux représentations contenant la même quantité d'information : représentation temporelle et représentation spectrale.

La représentation spectrale montre l'importance de la contribution d'une composante à la fréquence dans le signal $f(t)$.

On passe d'une représentation à l'autre par "transformation de Fourier".

II.1.2 Série de Fourier

Une des méthodes les plus utiles dans l'analyse des signaux est la série de Fourier. La série de Fourier permet de transformer n'importe quel signal périodique en une somme de sinusoïdes. Le signal résultant est la somme de trois sinusoïdes dont la fréquence est chaque fois un multiple de la fondamentale f_0. On peut donc prendre un signal périodique complexe et le simplifier à des sinusoïdes.

II.1.2.1 Définition

Le mathématicien français Jean-Batiste Fourier découvrit qu'on pouvait transformer n'importe quel signal périodique en une somme de sinusoïdes. Donc, pour une fonction périodique quelconque $f(t)$, Fourier démontra qu'on pouvait faire l'équivalence suivante :

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Ou a_v, a_n et b_n sont les coefficients de Fourier, et ω_0 est la fréquence fondamentale. Les fréquences qui sont des multiples entiers de ω_0 (comme $2\omega_0$, $3\omega_0$, etc.) sont nommés les harmoniques. Par exemple, $2\omega_0$ est la deuxième harmonique, $3\omega_0$ est la troisième harmonique, et ainsi de suite.

II.1.2.2 Coefficients de Fourier

Les coefficients de Fourier sont obtenus selon les équations suivantes :

$$a_v = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

Remarquer que a_v est la valeur moyenne du signal.

II.1.2.3 Symétrie et les coefficients de Fourier

Le type de symétrie d'un signal peut simplifier le calcul des coefficients de la série de Fourier. Selon le type de symétrie, certains des coefficients de la série de Fourier sont nuls.

Symétrie paire

Pour des fonctions paires, on peut démontrer que les coefficients de Fourier sont :

$$a_v = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(t)dt$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$$

$$b_n = 0$$

Symétrie impaire

Pour des fonctions impaires, on peut démontrer que les coefficients de Fourier sont :

$$a_v = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$$

Symétrie demi-onde

Pour des fonctions ayant de la symétrie demi-onde, on peut démontrer que les coefficients de Fourier sont :

$$a_v = 0$$

$a_n = 0$ pour *n* pair

$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$ pour *n* impair

$b_n = 0$ pour *n* pair

$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$ pour *n* impair

Symétrie quart-d'onde

Une fonction périodique qui a la symétrie quart-d'onde peut toujours être rendue soit paire ou impaire en faisant un choix approprié de $t = 0$. Pour une fonction ayant

La symétrie quart-d'onde, si on la rend *paire*, alors

$$a_v = 0$$

$a_n = 0$ pour *n* pair

$a_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\cos(n\omega_0 t)\,dt$ pour *n* impair

$$b_n = 0$$

Pour une fonction ayant la symétrie quart-d'onde, si on la rend *impaire*, alors

$a_v = 0$

$a_n = 0$

$b_n = 0$ pour n pair

$b_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} f(t)\sin(n\omega_0 t)\,dt$ pour n impair

Exemple 1

Soit le signal pair $x(t)$ de période T, défini sur $[0, T/2]$ par :

$$x(t) = \begin{cases} X & \text{pour } t \in [0, T/4[\\ -X & \text{pour } t \in [T/4, T/2[\end{cases}$$

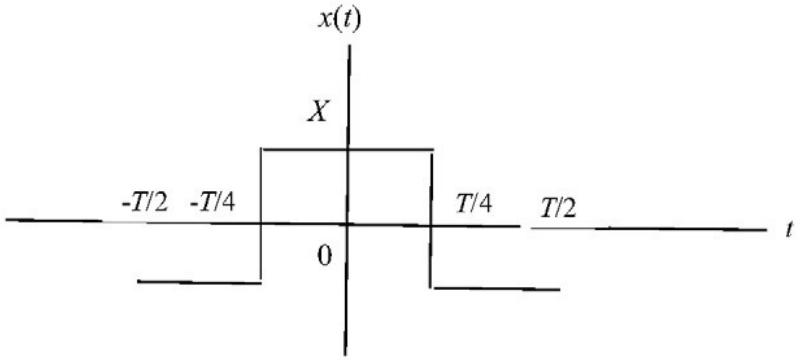


Figure II.1 : Signal de l'exemple 1

Calculer la série de Fourier de signal $x(t)$.

Le développement en série de Fourier donne

$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t)$

La fonction x(t) est pair et a une symétrie demi onde donc b_n=a_0=0

Avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} x(t)\cos(n\omega t)\,dt = \frac{4X}{n\omega T}\left([\sin(n\omega t)]_0^{T/4} - [\sin(n\omega t)]_{T/4}^{T/2}\right) = \frac{4X}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Pour n pair $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = 0$

Posons $n = 2k + 1$, alors $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = (-1)^k$, d'où

$$a_k = \frac{4X}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k+1} \quad \text{et} \quad x(t) = \frac{4X}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cos(2k+1)\omega t$$

Exemple 2

Soit le signal en dents de scie symétriques $x(t)$ de période T

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{4Xt}{T} & \text{sur } [0, \dfrac{T}{4}] \\ -\dfrac{4Xt}{T} + 2X & \text{sur } [\dfrac{T}{4}, \dfrac{T}{2}] \end{cases}$$

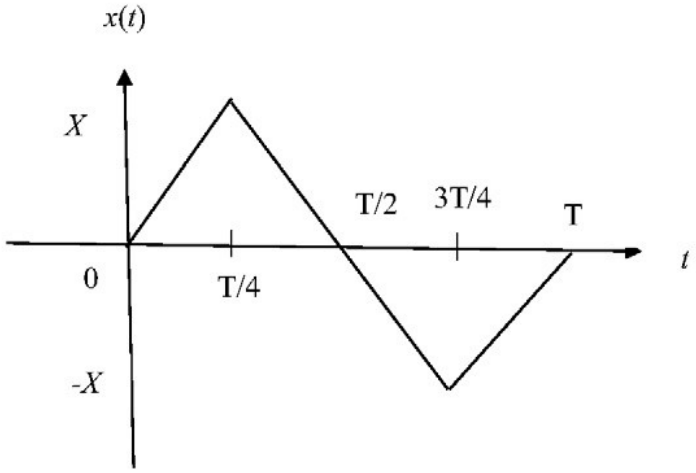


Figure II.2 : Signal de l'exemple 2

Le développement en série de Fourier donnera :

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t)$$

Avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et

$$b_n = \frac{4}{T}\left[\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4Xt}{T}\sin(n\omega t)dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left[\frac{-4Xt}{T} + 2X\right]\sin(n\omega t)dt\right]$$

$$b_n = \frac{4}{T}\left\{\frac{4X}{T}\left[\frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega t) - \frac{1}{n\omega}t\cos(n\omega t)\right]_0^{\frac{T}{4}} - \frac{4X}{T}\left[\frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega t) - \frac{1}{n\omega}t\cos(n\omega t)\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\right.$$

$$\left. + 2X\left[-\frac{1}{n\omega}\cos(n\omega t)\right]_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}}\right\}$$

En posant $n = 2k+1$, ce qui donne :

$$b_k = \frac{8X}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

$$x(t) = \frac{8X}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\big((2k+1)\omega t\big).$$

II.1.2.4 Formes alternatives de la série de Fourier

Il y a deux autres façons d'exprimer la série de Fourier : on peut utiliser une forme polaire, ou forme exponentielle. La forme polaire est la suivante :

$$f(t) = a_v + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \theta_n)$$

Ou A_n est défini selon :

$$A_n = a_n - jb_n$$

La forme polaire est plus utile pour faire des graphiques. Il est plus facile de comprendre des graphes d'amplitude et de phase que de regarder des sinus et cosinus pour comprendre le comportement d'un signal. Cependant, lors de calculs mathématiques (dans un logiciel), il peut y avoir des erreurs si on utilise la notation polaire, à cause des approximations des radians et les fonctions trigonométriques inverses.

La forme exponentielle est :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}$$

Où

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt$$

La forme exponentielle est obtenue à partir de la relation d'Euler. Cette représentation de la série de Fourier est souvent plus facile à utiliser lors de calculs mathématiques ou lors de la programmation.

II.1.2.5 Spectre d'amplitude et de phase

Une fonction périodique est définie par ses coefficients de Fourier et sa période. Si on connaît a_v, a_n, b_n et T, on peut construire $f(t)$. Si on connaît a_n et b_n, on connaît aussi l'amplitude A_n et le déphasage θ_n de chaque harmonique.

On peut représenter graphiquement une fonction périodique en termes de l'amplitude et de la phase de chaque terme de la série de Fourier. On appelle ceci le spectre de la fonction. Ce graphe permet de visualiser quelles fréquences ont une amplitude importante ; dans certains cas, la majorité du signal est contenu dans quelques harmoniques.

Exemple 3

Dans le cas d'un signal sinusoïdal pur (Figure II.3) décrit par l'expression suivante :

$$x(t) = X\sin\omega t$$

Nous voyons apparaître une amplitude X pour un signal sinusoïdal de pulsation ω (ou de fréquence f). Ces 2 informations, très importantes sur le plan d'une analyse de réseau, peuvent être portées sur un graphique qui porte en ordonnées l'amplitude de la sinusoïde, sa fréquence étant portée sur l'axe des abscisses. Cette représentation graphique liée au signal $x(t)$ est la représentation spectrale du signal $x(t)$ (Figure II.4).

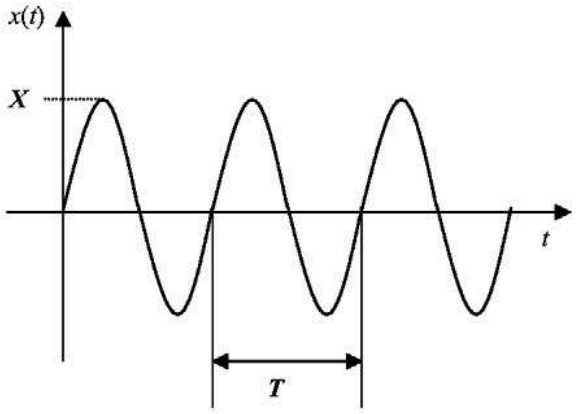


Figure II.3 : Signal sinusoïdal

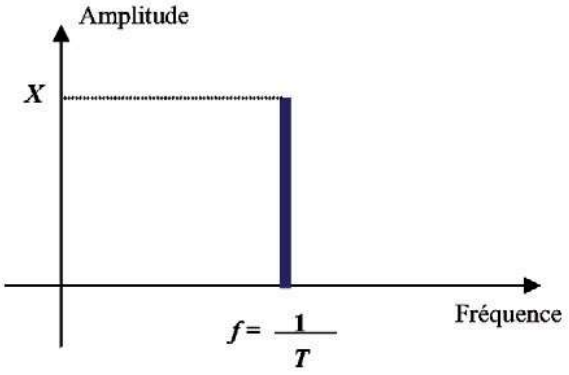


Figure II.4 : Spectre du signal $x(t)$

Exemple 4

Un courant $i(t)$ est décrit par la relation mathématique suivante :

$$\begin{cases} i(t) = I \quad sur\ une\ demi\ période \\ i(t) = -I\ sur\ une\ demi\ période \end{cases}$$

La figure II.5 donne une représentation temporelle de $i(t)$

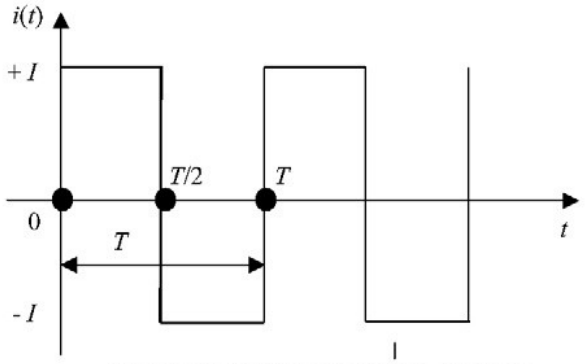


Figure II.5 : Créneaux de courant

Le calcul de la série de Fourier de ce signal $i(t)$ donne l'expression suivante :

$$i(t) = \frac{4.I}{\pi}\sin\omega t + \frac{4.I}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{4.I}{5\pi}\sin 5\omega t + \cdots + \frac{4.I}{n\pi}\sin n\omega t \qquad (n\ impaire)$$

Ce signal n'a pas de composante continue, il est composé :

- D'un signal sinusoïdal de fréquence f (celle du signal de base) d'amplitude $\frac{4.I}{\pi}$
- D'un signal sinusoïdal de fréquence $3f$ d'amplitude $\frac{4.I}{3.\pi}$
- D'un signal sinusoïdal de fréquence $5f$ d'amplitude $\frac{4.I}{5.\pi}$

Cette description permet d'établir la représentation spectrale (ou harmonique) suivante (Figure II.6)

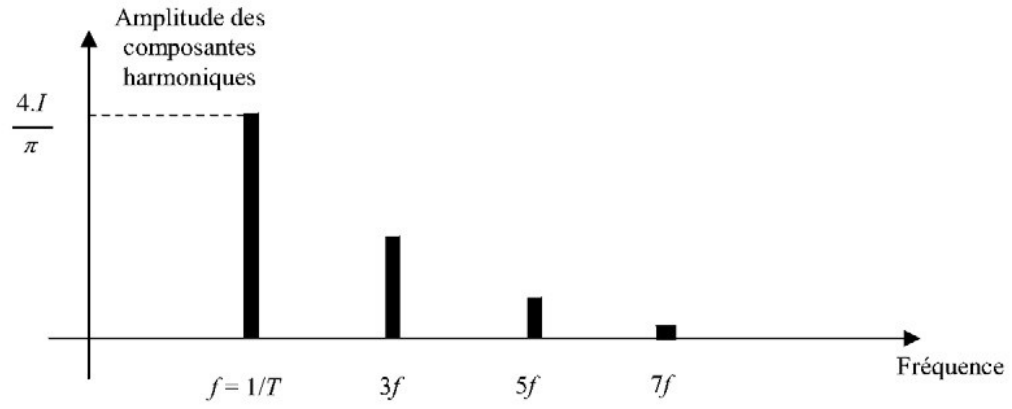


Figure II.6 : Représentation spectrale (harmonique) de $i(t)$

II.1.3 Transformée de Fourier

Dans la partie précédente, on a vu qu'on pouvait représenter une fonction périodique par une somme de sinusoïdes. La transformée de Fourier permet de représenter des signaux qui ne sont pas périodiques.

La transformée de Fourier est très utile dans certains domaines comme les télécommunications et le traitement de signaux.

II.1.3.1 Définition

L'équation représente la transformée de Fourier :

$$F(\omega) = F\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt$$

La transformée inverse est donnée par :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

Exemple 5

Faire la transformée de Fourier du pulse suivant :

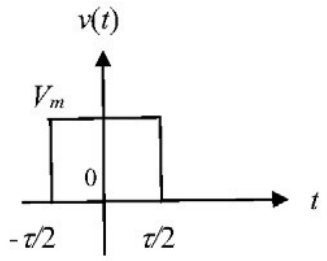


Figure II.7 : Signal de l'exemple 5.

En appliquant directement la définition, on obtient :

$$V(\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_m e^{-j\omega t} dt$$

$$= V_m \tau \, sinc(\frac{\omega\tau}{2})$$

Fonction	***f*(t)**	***F*(ω)**
Impulsion	$\delta(t)$	1
Constante	A	$2\pi A\delta(t)$
Signum	Sgn(t)	$\frac{2}{j\omega}$
Echelon	u(t)	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
Exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$ $a > 0$
Exponentiel complexe	$e^{-j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
Cosinus	$\cos(\omega_0 t)\, u(t)$	$\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$
Sinus	$\sin(\omega_0 t)\, u(t)$	$j\pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$

Tableau II.1 : La transformée de Fourier de quelques fonctions usuelles

II.1.3.2 Propriétés

	S(t)	S(f)
Linéarité	$\alpha s(t) + \beta r(t)$	$\alpha S(f) + \beta R(f)$
Translation	$s(t - t_0)$	$e^{-2j\pi f t_0} S(f)$
Conjugaison	$s^*(t)$	$S^*(-f)$
Dérivation	$\frac{d^n s(t)}{dt^n}$	$(j2\pi f)^n S(f)$
Dilatation	$s(at)$avec $a \neq 0$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} S\left(\frac{f}{a}\right)$
Convolution	$s(t) * r(t)$	$S(f).R(f)$
Dualité	$S(t)$	$s(-f)$

Tableau II.2 : Les propriétés de la transformée de Fourier.

II.1.3.3 Théorème de Parseval

Le théorème de Parseval permet de faire le lien entre l'énergie d'un signal en fonction du temps et l'énergie en fonction de la fréquence. Puisque la fréquence et le temps sont deux domaines qui permettent de d´écrire complètement un signal, il faut que l'énergie totale soit la même dans les deux domaines. Le théorème de Parseval est :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

II.2 Traitement du signal discret

II.2.1 Transformé de Fourier discrète

II.2.1.1 Définition

La transformée de Fourier discrète est donnée par :

$$X_{DFT}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}$$

La transformée inverse (IDFT), qui permet de retrouver le signal $x[n]$, est :

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X_{DFT}[k]\, e^{j2\pi kn/N}$$

Exemple 5

Calculer la DFT du signal suivant :

$x[n] = \{1, 2, 1, 0\}$

Dans ce cas-ci, on a *N*=4 , on calcul les valeurs :

$$k = 0: X_{DFT}[0] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{0} = 1 + 2 + 1 + 0 + 4$$

$$k = 1: X_{DFT}[1] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-j\pi n/2} = 1 + 2e^{-j\pi/2} + e^{-j\pi} + 0 = -j2$$

$$k = 2: X_{DFT}[2] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-j\pi n} = 1 + 2e^{-j\pi} + e^{-j2\pi} + 0 = 0$$

$$k = 3: X_{DFT}[3] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-j3\pi n/2} = 1 + 2e^{-j3\pi/2} + e^{-j3\pi} + 0 = j2$$

La DFT est donc : $X_{DFT} = \{4, -j2, 0, j2\}$

II.2.1.2 Propriétés

Linéarité : $kx[n] \Leftrightarrow kX_{DFT}[k]$

Additivité : $x_1[n] + x_2[n] \Leftrightarrow X_1[k] + X_2[k]$

Repliement : $x[-n] \Leftrightarrow X_{DFT}[-k]$

Déphasage : $x[n - s] \Leftrightarrow e^{-j2\pi sk/N} X_{DFT}[k]$

Convolution périodique : $x[n] * y[n] \Leftrightarrow X_{DFT}[k] Y_{DFT}[k]$

II.2.1.3 Théorème de Parseval

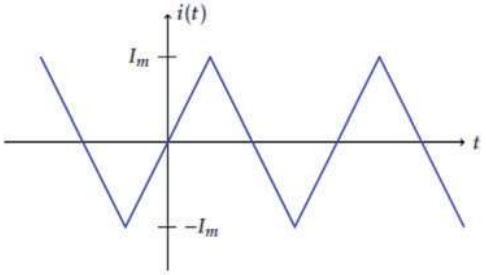
Puisque le domaine du temps et de la fréquence sont équivalents pour représenter un signal, ils doivent avoir la même énergie. On appelle ceci la loi de Parseval. Pour la DFT, on l'exprime de la façon suivante :

$$\sum_{i=0}^{N-1} x^2[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{N/2} |X[k]|^2$$

Exercices sur le chapitre II

Exercice N°1

Calculer les coefficients de Fourier pour la fonction de la figure suivante :



Solution N°1

La première chose à faire est de chercher pour de la symétrie. La fonction est impaire, et de plus, possède de la symétrie demi-onde et quart-d'onde. Puisque la fonction est impaire, a_0= 0, et a_n = 0. A cause de la symétrie demi-onde, b_n = 0 pour les valeurs paires de n. A cause de la symétrie quart-d'onde, l'équation de b_n pour les valeurs impaires de n est :

$$b_n = \frac{8}{T}\int_0^{T/4} i(t)\sin(n\omega_0 t)dt$$

Dans l'intervalle $0 \leq t \leq T/4$, l'équation de $i(t)$ est :

$$i(t) = \frac{4I_m}{T}t$$

Alors,

$$b_n = \frac{8}{T}\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4I_m}{T} t\sin(n\omega_0 t)dt$$

$$= \frac{32I_m}{T^2}\left(\frac{\sin(n\omega_0 t)}{n^2\omega_0^2} - \frac{t\cos(n\omega_0 t)}{n\omega_0}\right)\Bigg|_0^{T/4}$$

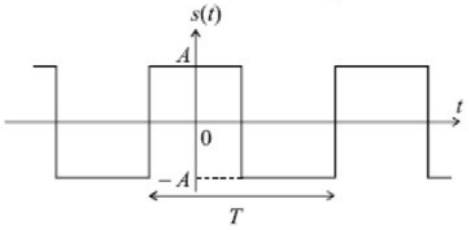
$$= \frac{8I_m}{\pi^2 n^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad n \text{ est impair}$$

La représentation en série de Fourier de $i(t)$ est :

$$i(t) = \frac{8I_m}{\pi^2}\sum_{n=1,2,3}^{\infty}\frac{1}{n^2}sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)sin(n\omega_0 t)$$

Exercice N°2

Calculer la décomposition en série de Fourier d'un signal carré d'amplitude A et de période T



Solution N°2

Pour n pair, A_n=0

$$A_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} s(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{4}{T}\int_0^{T/4} A\cos n\omega t\, dt$$

Calculons cette expression dans le cas n impair :

$$A_n = \frac{4A}{T}\int_0^{T/4} \cos n\omega t\, dt = \frac{4A}{T}\left[\frac{\sin n\omega t}{n\omega}\right]_0^{T/4} = \frac{4A}{T}\left[\frac{\sin(n\omega T/4)}{n\omega} - 0\right]$$

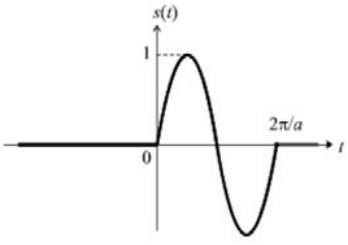
$$A_n = \frac{4A}{nT\omega}\sin(n\pi/2) = \frac{2A}{\pi n}(-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

Exercice N°3

On considère la fonction $s(t)$ définie par :

$$s(t) = \sin at \quad \text{pour} \quad 0 \le t \le \frac{2\pi}{a}$$

$$s(t) = 0 \quad \text{partout ailleurs}$$



Calculer la transformée de Fourier de ce signal

Solution N°3

Le signal $s(t)$ peut se décomposer sous la forme d'une différence de deux signaux :

$$s(t) = s_1(t) - s_2(t)$$

$s_1(t) = \sin at$ pour $t \geq 0$

Et

$s_2(t) = \sin at$ pour $t \geq \frac{2\pi}{a}$

Dans ces conditions :

Le signal $s(t)$ étant à énergie finie, on en déduit l'expression de la transformée de Fourier :

$$S(j\omega) = \frac{a}{a^2 - \omega^2}\left(1 - e^{-\frac{j2\pi\omega}{a}}\right)$$

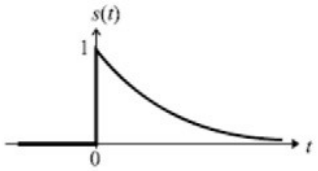
$$S(j\omega) = \frac{a}{a^2 - \omega^2}\left(1 - \cos\frac{2\pi\omega}{a} + j\sin\frac{2\pi\omega}{a}\right)$$

Exercice N°4

On considère la fonction $s(t)$ représenté sur la figure suivante :

$$s(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

$$s(t) = e^{-at} \text{ pour } t \geq 0 \text{ avec } a > 0$$



Calculer l'énergie totale de ce signal à partir de son expression temporelle et vérifier l'égalité de Parseval en calculant cette même énergie à partir de l'expression de sa transformée de Fourier.

Solution N°4

L'énergie totale du signal, d'après son expression temporelle est :

$$E = \int_0^{+\infty} s^2(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-2at}dt = \left[\frac{e^{-2at}}{-2a}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2a}$$

Par ailleurs, la transformée de Fourier du signal s'obtient aisément (puisqu'il s'agit d'un signal à énergie finie), à partir de sa transformée de Laplace :

$$S(p) = \frac{1}{p + a} \Rightarrow S(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$

$$|S(j\omega)| = |S(f)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + a^2}} = \frac{1}{\sqrt{4\pi^2 f^2 + a^2}}$$

D'après l'égalité de Parseval, on doit avoir :

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 df$$

Calculons cette intégrale :

$$E = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{df}{f^2 + \left(\frac{a}{2\pi}\right)^2} = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{2\pi}{a}\arctan\frac{4\pi f}{a}\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$E = \frac{1}{2\pi a}\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{2a}$$

Ce qui permet, effectivement, de vérifier l'égalité de Parseval.

Chapitre III

Transformée de Laplace et systèmes analogiques

III.1 Systèmes à temps continu

III.1.1 Définition

Un système est un bloc mathématique qui permet de transformer un signal quelconque. Le système de base à une entrée et une sortie. Le système peut représenter un phénomène physique, comme un thermomètre, où l'entrée est un signal électrique et la sortie est la chaleur. Un système peut aussi représenter un réseau de transmission de données, ou un filtre numérique dans un ordinateur. Une représentation générale est donnée à la figure III.1 :

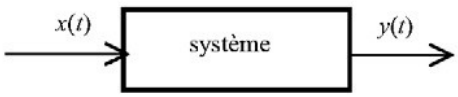


Figure III.1 : Représentation générale du système à temps continu

Pour les systèmes à temps continu, les équations qui relient la sortie à l'entrée sont typiquement des équations différentielles. Les systèmes étudiés ici sont tous des systèmes linéaires. Ils possèdent quelques caractéristiques très importantes.

III.1.2 Linéarité

Un système est dit linéaire s'il possède deux caractéristiques : homogénéité, et additivité. Une troisième propriété, l'invariance dans le temps, n'est pas strictement nécessaire pour la linéarité, mais est une composante importante dans la plupart des techniques d'analyse de signaux.

L'homogénéité, ou proportionnalité, veut dire qu'une variation dans l'amplitude au signal d'entrée produit une même variation d'amplitude à la sortie. C'est-à-dire, si on applique un signal $x(t)$ à un système et qu'on obtient une sortie $y(t)$, alors une entrée $kx(t)$ produira une sortie $ky(t)$, comme montre cette figure

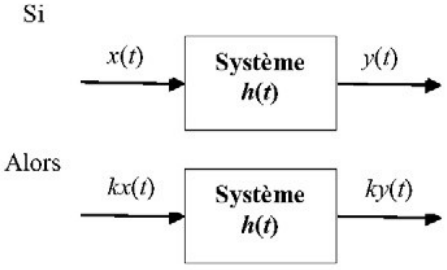


Figure III.2 : Principe de l'homogénéité

L'additivité veut dire que si on applique 2 (ou plus) signaux à l'entrée, la sortie est la somme individuelle de leur réponses. Ex : soit un système où on applique une entrée $x_1(t)$ qui produit une sortie $y_1(t)$, et une entrée $x_2(t)$ produit une sortie $y_2(t)$. Si le système possède l'additivité, si

on applique les deux entrées en même temps, $x_1(t)+x_2(t)$, la sortie sera $y_1(t) + y_2(t)$. Un exemple est donné à la figure suivante :

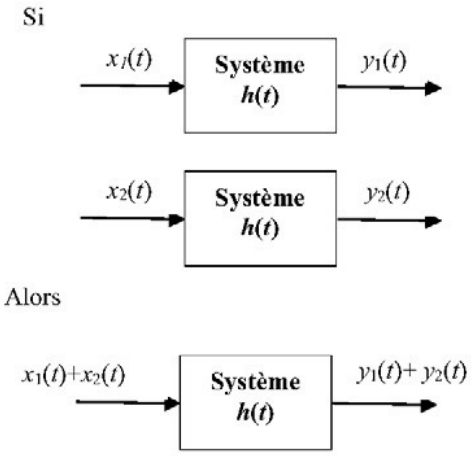


Figure III.3 : Principe de L'additivité.

III.1.2.1 Propriétés des systèmes linéaires

Réponse Impulsionnelle

La réponse impulsionnelle est une caractéristique très importante des systèmes. Si l'entrée à un système est un pulse $\delta(t)$, alors la sortie est appelée la *réponse impulsionnelle* $h(t)$, comme montre la figure III .6. On peut démontrer que si on connaît la réponse impulsionnelle, on peut calculer la sortie pour n'importe quelle entrée (pour un système linéaire).

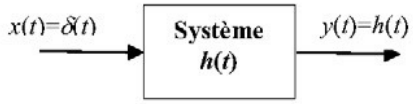


Figure III.6 : La réponse impulsionnelle d'un système

La réponse impulsionnelle est donc très importante pour caractériser les systèmes physiques. Il suffit d'envoyer un pulse de courte durée puis mesurer la réponse pour être capable de trouver la réponse à n'importe quelle entrée. Un exemple de ceci est la communication entre une tour et un téléphone cellulaire. Pour savoir comment les signaux vont être réfléchis par les édifices, les voitures, les arbres, il faut la réponse impulsionnelle du système. On envoie un pulse entre la tour et le téléphone cellulaire, ce qui permet par la suite d'éliminer les réflexions et ainsi avoir le signal original, la voix, qui est perçu correctement par l'utilisateur. Avec la réponse impulsionnelle, on n'a pas besoin de connaître tous les détails du fonctionnement d'un système.

III.1.3 Convolution

La convolution est un outil très important dans le calcul de la sortie d'un système.

Pour n'importe quelle entrée $x(t)$, on peut trouver la sortie $y(t)$ si on connaît la réponse impulsionnelle $h(t)$. La convolution est donnée par :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\lambda)x(\lambda)d\lambda$$

Remarquer le changement de variable : on fait l'intégrale selon λ, mais la réponse est en fonction du temps t.

On utilise plus souvent une représentation simplifiée pour noter la convolution :

$$y(t) = h(t) * x(t) = x(t) * h(t)$$

Où on lit "la convolution de h(t) avec x(t)". La notation $h(t)$ * $x(t)$ implique qu'on utilise la forme intégrale

Pour des systèmes réels, la sortie est nulle pour $t < 0$, et on peut donc simplifier l'intégrale à:

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda$$

III.2 La transformée de Laplace

III.2.1 Définition de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace d'une fonction est donnée par l'expression suivante :

$$L\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

Où le symbole $L\{f(t)\}$ veut dire *la transformée de Laplace de* $f(t)$.

On utilise aussi l'expression $F(s)$ pour décrire la transformée de Laplace :

$F(s) = L\{f(t)\}$

La transformée de Laplace permet donc de transformer le problème du domaine du temps au domaine de la fréquence. Lorsqu'on obtient la réponse voulue dans le domaine de la fréquence, on transforme le problème à nouveau dans le domaine du temps, à l'aide de la *transformée inverse de Laplace*. Le diagramme de la figure III.7 illustre ce concept.

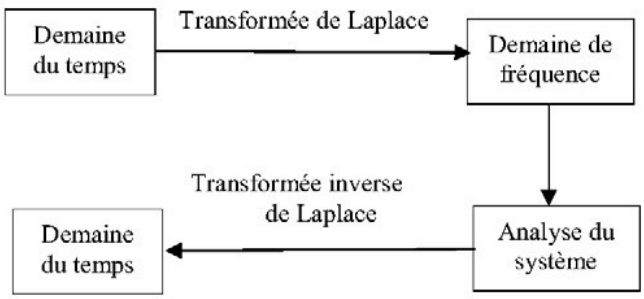


Figure III.7: Le diagramme de transformation

L'avantage principal d'analyser des systèmes de cette façon est que les calculs sont beaucoup plus simples dans le domaine de Laplace. Dans le domaine de Laplace, les dérivées et intégrales se combinent à l'aide de simples opérations algébriques ; pas besoin d'équations différentielles.

Exemples

Pour la fonction échelon :

$$L\{u(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty 1e^{-st}dt = \frac{1}{s}$$

La transformée de Laplace d'un exponentiel décroissant est :

$$L\{e^{-at}\} = \int_0^\infty e^{-at}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(a+s)t}dt = \frac{1}{s+a}$$

Le tableau suivant présente la liste des transformées de Laplace les plus courantes.

Fonction	***f*(t)**	***F*(s)**
Impulsion	$\delta(t)$	1
Echelon	u(t)	$\frac{1}{s}$
Rampe	tu(t)	$\frac{1}{s^2}$
Polynôme (général)	$t^n u$(t)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
Exponentiel	$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$
Cosinus	$\cos(\omega t)\,u(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
Sinus	$\sin(\omega t)\,u(t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
Cosinus amorti	$e^{-at}\cos(\omega t)\,u(t)$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$
Sinus amorti	$e^{-at}\sin(\omega t)\,u(t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

Tableau III.1 : Les transformées de Laplace les plus courantes

III.2.2 Propriétés

La transformée de Laplace a plusieurs propriétés intéressantes qui rendent le calcul de fonctions complexes plus simple. On note entre autre la linéarité, dérivée et les théorèmes de valeurs finales et initiales. Le tableau suivant montre ces propriétés.

Propriétés	Théorème	Nom
1	$L[f(t)] = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$	Définition
2	$L[kf(t)] = kF(s)$	Linéarité
3	$L[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$	Linéarité
4	$L[e^{-at}f(t)] = F(s + a)$	Translation
5	$L[f(t - \tau)] = e^{-\tau s}F(s)$	Retard temporelle
6	$L[af(t)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$	Proportionnalité
7	$L\left[\frac{d^n f}{dt^n}\right] = s^n F(s)$	Dérivée
8	$L\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	Intégration
9	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$	Valeur finale
10	$f(0) = \lim_{s\to \infty} sF(s)$	Valeur initiale

Tableau III.2 : Les propriétés de transformée de Laplace

Convolution

La convolution est plus simple dans le domaine de Laplace :

$L\{h(t) * x(t)\} = H(t)X(s)$

III.3 Transformées inverses

Après avoir multiplié les transformées de Laplace de *h*(*t*) et *x*(*t*), pour obtenir la réponse finale dans le domaine du temps, il faut faire la transformée inverse. L'expression obtenue est souvent une fonction rationnelle de *s* : c'est le rapport de deux polynômes de *s*. Pour la plupart des systèmes physiques, l'expression obtenue est une fonction rationnelle de *s*. Si on

peut inverser n'importe quelle fonction rationnelle de *s*, on peut résoudre les problèmes de convolution.

De façon générale, il faut trouver la transformée inverse d'une fonction qui a la forme

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}$$

On peut écrire l'expression de *F*(*s*) sous une autre forme :

$$F(s) = k\frac{(s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_n)}{(s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n)}$$

Où z_i est appelé un *zéro* de *F*(*s*): ce sont les racines du numérateur, et *pi* est appelé un *pôle* de *F*(*s*) : ce sont les racines du dénominateur. De façon générale, *F*(*s*) est appelée la *fonction de transfert*.

Exemple :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

On peut écrire :

$$F(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{(s+1)} + \frac{K_2}{(s+2)}$$

$K_1 = 2$

Pour trouver K_2, on fait le même processus, sauf qu'on multiplie par (*s* + 2) cette fois.

$K_2 = -2$

Donc,

$$\mathrm{F(s)} = \frac{2}{s+1} + \frac{-2}{s+2}$$

Qui donne la transformée inverse suivante :

$f(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t})u(t)$

Note : La fonction *u*(*t*) doit être appliquée à toute transformée inverse. Cependant, pour alléger le texte, on n'écrira plus le *u*(*t*).

III.4 Théorème de la valeur initiale et valeur finale

Les théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale sont utiles parce qu'ils permettent de calculer *F*(*s*) à partir de *f* (*t*) à 0 ou ∞. On peut donc calculer les valeurs initiales et finales de *f* (*t*) avant de faire la transformée inverse d'une fonction, pour s'assurer si le tout fait du sens.

Le théorème de valeur initiale est :

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

Il y a une seule restriction pour l'utilisation de ce théorème : $f(t)$ ne doit pas contenir d'impulsions.

Le théorème de la valeur finale est :

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

La restriction pour l'utilisation de ce théorème est que la partie réelle des pôles de $F(s)$ doit être négative.

Exemple

Calculer la valeur finale de $f(t)$, si

$$F(s) = \frac{3}{s(s^2 + 2s + 5)}$$

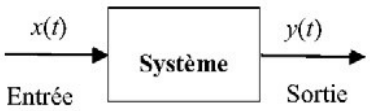
On applique le théorème (les pôles de $F(s)$ ont des parties réelles négatives).

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} \frac{3}{s^2 + 2s + 5} = 0.6$$

On peut confirmer ce résultat avec la valeur calculée de $f(t)$.

III.5 Fonction de transfert

Soit un système quelconque, donné par la figure suivante :



La fonction de transfert d'un système est donnée par:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

Elle permet de relier la sortie d'un système à son entrée.

Pour les expressions de modélisation,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n}$$

Habituellement, $n \geq m$.

La fonction de transfert est une représentation mathématique d'un système. Cette fonction peut être une représentation de divers systèmes (mécanique, électrique, etc..).

On obtient la fonction de transfert d'un système à partir des équations différentielles qui décrivent ce système, avec des conditions initiales nulles. C'est un modèle du système, *indépendant du signal d'entrée et de l'amplitude* (et donc un système linéaire).

Les pôles et les zéros

Les pôles de *F*(s) qui sont les racines du dénominateur *X*(s) ; ils déterminent complètement la partie transitoire (oscillation et amortissement) des réponses temporelles.

Les zéros de *F*(s) qui sont les racines du numérateur *Y*(s) ; leur effet n'intervient que sur les amplitudes des composantes temporelles des signaux *f*(t).

Exercices sur le chapitre III

Exercice N°1

Trouver la transformation de Laplace des fonctions suivantes :

1. $x(t) = e^{-at}u(t)$.
2. $x(t) = sin\omega t\ u(t)$.
3. $x(t) = e^{-at}sin\omega t\ u(t)$

Solution N°1

1. $x(t) = e^{-at}u(t)$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} e^{-at} \times e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-(a+p)t}dt$$

$$X(s) = \left[-\frac{1}{a+p}\ e^{-(a+p)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{a+p}$$

2. $x(t) = sin\omega t\ u(t)$

$$X(s) = \int_0^{+\infty} \sin\omega t \times e^{-st}\ dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \times e^{-st}dt = \frac{1}{2j}\left[\int_0^{+\infty} e^{-(s-j\omega)t}dt - \int_0^{+\infty} e^{-(s+j\omega)t}dt\right]$$

$$= \frac{1}{2j} \times \left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

3. $x(t) = e^{-at}sin\omega t\ u(t)$

$$X(s) = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$$

Exercice N°2

Trouver la transformation de Laplace de la fonction :

$$f(t) = 2e^{-t}\cos 10t - t^4 + 6e^{-(t-10)}u(t-10)$$

Solution N°2

$$F(s) = \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+100} - \frac{24}{s^5} + \frac{6e^{-10s}}{s+1}$$

Exercice N°3

Trouver l'origine des fonctions suivantes :

1. $F(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)}$
2. $F(s) = \frac{10}{(s+4)(s+2)^3}$
3. $F(s) = \frac{100}{(s^2+25)(s+2)}$

Solution N°3

1. $F(s) = \frac{2s+3}{s(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3}$

   $A = 1, B = 1$

   $F(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s+3}$

   $f(t) = (1 + e^{-3t})\, u(t)$

2. $F(s) = \frac{10}{(s+4)(s+2)^3} = \frac{A}{s+4} + \frac{A_1}{(s+2)^3} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{A_3}{s+2}$

   $A = -\frac{5}{4}$; $A_1 = 5$; $A_2 = -\frac{5}{2}$; $A_3 = \frac{5}{4}$

   Donc : $F(s) = \frac{-5/4}{s+4} + \frac{5}{(s+2)^3} - \frac{\frac{5}{2}}{(s+2)^2} + \frac{5/4}{s+2}$

   $f(t) = -\frac{5}{4}e^{-4t} + \frac{5}{2}t^2e^{-2t} - \frac{5}{2}te^{-2t} + \frac{5}{4}e^{-2t}$

3. $F(s) = \frac{100}{(s^2+25)(s+2)} = \frac{A}{s+5j} + \frac{B}{s-5j} + \frac{C}{s+2}$

   $A = 1.86 \times e^{j158.2}; B = 1.86 \times e^{-j158.2}; C = 3.45$

   $f(t) = 3.45\, e^{-2t} + 3.72\cos(5t - 158.2)$

Exercice N°4

Soient les deux systèmes A et B définis par ces équations différentielles :

A/ $\ddot{y} + y = e(t)$.

B/ $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 3\dot{x} + 2x$.

Déterminer la fonction de transfert de ces systèmes.

Solution N°4

A/ $\ddot{y} + y = e(t)$.

$(s^2 + 1)Y(s) = E(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{1}{(s^2 + 1)}$$

B/ $\ddot{y} + 4\dot{y} + 4y = 3\dot{x} + 2x$.

$(s^2 + 4s + 4)Y(s) = (3s + 2)X(s)$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{3s + 2}{(s + 2)^2}$$

Exercice N°5

Soient les fonctions de transfert suivantes :

$$G_1(s) = \frac{20}{s\,(s + 1)(s + 4)}$$

$$G_2(s) = \frac{10}{s\,(s + 2)(s - 1)^2}$$

Trouver l'équation différentielle de chaque système.

Solution N°5

1. $G_1(s) = \frac{20}{s\,(s+1)(s+4)}$

   $$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{20}{(s^2 + s)(s + 4)} = \frac{20}{s^3 + 5s^2 + 4s}$$

   $\dddot{y} + 5\ddot{y} + 4\dot{y} = 20e$

2. $G_2(s) = \frac{10}{s\,(s+2)(s-1)^2}$

   $$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{10}{S^4 - 3s^2 + 2s}$$

$\overset{4}{\tilde{y}} - 3\ddot{y} + 2\dot{y} = 10e$

Chapitre IV

Transformée en Z et systèmes numériques

IV.1 Systèmes discrets

Un système à temps discret est un système où l'entrée et la sortie sont des signaux discrets. Les systèmes étudiés ici sont des systèmes linéaires. Il est donc bien important de comprendre les caractéristiques des systèmes linéaires.

Les systèmes linéaires discrets possèdent les mêmes caractéristiques que les systèmes linéaires continus.

IV.2 Transformée en Z

IV.2.1 Définition

La transformée en *z* est l'équivalent dans le domaine discret de la transformée de Laplace pour le domaine continu. L'utilisation principale de la transformée en *z* est le design de filtres numériques.

La forme standard de la transformée en *z* est :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$

Exemple 1

Si $X(z) = 1 - z^{-1} + 0.5\,z^{-2}$, on a

$$x(k) = 0,\ \forall k < 0 \text{ ou } \forall k > 2;\ x(0) = 1;\ x(1) = -1; s(2) = 0.5$$

Exemple 2

Calculer la transformée en *z* du signal suivant :

$x(k) = a^k, \quad \forall k \geq 0$

La transformée en *z* est :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z} = \frac{1}{1 - \frac{a}{z}} = \frac{z}{z - a} \qquad \text{si} \quad \left|\frac{a}{z}\right| < 1$$

IV.2.2 Transformée en Z des signaux élémentaires

Impulsion unité δ(*k*)

$$\delta(0) = 1 \quad et\ \delta(k) = 0 \qquad \text{pour} \quad k > 0$$

$$Z[\delta(k)] = \delta(0) = 1$$

Echelon unité *u*(*k*)

$Z[u(k)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-k}$

Est une série géométrique de raison z^{-1}, d'où

$$Z[u(k)] = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$$

Signal rectangulaire *rect(k)*

$$Z[rect(k)] = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-(K-1)}$$

$$Z[rect(k)] = \frac{1 - z^{-k}}{1 - z^{-1}}$$

Signal exponentiel

$$Z[e^{-\alpha kT}u(k)] = \frac{z}{z - e^{-\alpha T}} \qquad \alpha \in C$$

IV.2.3 Propriétés de la transformée en *z*

Propriété	Signal	Transformée en z
Déphasage	$x[k\text{-}s]$	$z^{-s}X(z)$
Réflexion	$x[-k]$	$X\left(\frac{1}{z}\right)$
Echelonnage	$\alpha^k x[k]$	$X\left(\frac{z}{\alpha}\right)$
Convolution	$x(k) * h(k)$	$X(z)H(z)$

Tableau IV.1 – Propriétés de la transformée en *z*

IV.3 Théorème de la valeur initiale et finale

Le théorème de la valeur initiale est :

$x[0] = \lim_{z\to\infty} X(z)$

Le théorème de la valeur finale est :

$x[\infty] = \lim_{z\to 1}(z-1)X(z)$

IV.4 Equations récurrentes

Pour un système linéaire, discret ou analogique échantillonné d'entrée *x* et de sortie *y*, on a

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i y(k-i) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x(k-j)$$

Ou aussi

$$\sum_{i=0}^{m} \alpha_i y(k+i) = \sum_{j=0}^{n} \beta_j x(k+j) \qquad n \le m$$

m : l'ordre de système.

IV.5 Fonction de transfert échantillonnée

Tout comme la transformée de Laplace permet de trouver la fonction de transfert d'un système, la transformée en *z* permet de trouver la fonction de transfert d'un système discret.

Pour un système discret, la fonction de transfert a la forme :

$$H(z) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

On peut aussi utiliser une autre forme pour représenter la fonction de transfert. Soit z_i ; i = 1, 2, 3,……..,m les racines du numérateur, et p_k; k = 1, 2, 3……n les racines du dénominateur.

On peut exprimer la fonction de transfert selon :

$$H(z) = K\frac{(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m)}{(z - p_1)(z - p_2) \ldots (z - p_k)}$$

Si on suppose que les facteurs communs aient été annulés, les racines du numérateur sont appelés les zéros et les racines du dénominateur sont appelés les pôles.

IV.5.1 Diagramme des pôles et zéros

On peut tracer les pôles et les zéros sur un graphique, les pôles étant représentés par des "x" et les zéros représentés par des cercles.

IV.5.2 Réponse d'un système

La réponse $y[n]$ d'un système ayant une réponse impulsionnelle $h[n]$ soumis à une entrée $x[n]$ est donnée par la convolution $y[n] = x[n]*h[n]$. La convolution se transforme à une multiplication dans le domaine *z*. On a donc :

$$Y(z) = X(z)H(z) \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{H(z)} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

On peut aussi représenter un système en fonction de son équation aux différences.

IV.5.3 Stabilité

La stabilité est un critère important dans le design de systèmes. Un système instable ne répondra pas selon les critères définis et donnera des erreurs à la sortie. Dans des cas graves, des systèmes électroniques instables peuvent endommager des équipements. On doit porter une attention particulière à la stabilité des systèmes.

Pour un système causal, les pôles de la fonction de transfert doivent être à l'intérieur du cercle unitaire dans le plan *z*. Ceci provient des observations suivantes :

1. Pôles à l'extérieur du cercle unitaire : donnent une croissance exponentielle même si l'entrée est finie.
2. Plusieurs pôles sur le cercle unitaire : produit une croissance polynômiale.
3. Pôle unique sur le cercle unitaire : peut produire une croissance exponentielle. Le système est marginalement stable.

La ROC (région de convergence) d'un système stable doit toujours inclure le cercle unitaire.

IV.6 Transformée en *z* inverse

Le calcul de la transformée inverse $x(k)$ d'une fonction en $X(z)$ peut se faire selon deux méthodes :

1. Par décomposition en éléments simples de X(z)/z puis en utilisant la table de transformées.

   Exemple 1 :

$$X(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-0.5)}$$

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{2}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{4}{z-1} - \frac{4}{z-0.5}$$

$$x(k) = 4 - 4(0.5)^k$$

   Exemple 2 :

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}}{1 + z^{-1}} = 4z^{-1} - 2 + \frac{3}{1 + z^{-1}}$$

$$x(k) = -2\delta(k) + 4\delta(k-1) + 3\delta(-1)^k\, u(k)$$

2. On peut aussi calculer les premières valeurs de $x(k)$ en effectuant une division de polynômes :

   $X(z) = \frac{z}{z-2} = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2}$ ... ...

   On retrouve les premières valeurs de $x(k)$: $x(0) = 1$; $x(1)=2$; $x(2)=4$.

IV.7 Transformée unilatérale

La transformée unilatérale est une transformée pour les signaux causals, où $x[k] = 0$ pour $k < 0$. La définition est :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x[k] z^{-k}$$

La plupart des propriétés vues auparavant s'appliquent à la transformée en *z* unilatérale.

IV.7.1 Déphasage

Pour un signal déphasé vers la droite, la propriété est :

$x[k-s] = z^{-s}X(z)$

Pour un signal déphasé vers la gauche, la propriété est :

$x[k+s] = z^{s}X(z)$

IV.8 Réponse en fréquence

On peut obtenir la réponse en fréquence d'un système discret si on remplace $z = e^{j2\pi F}$ dans la fonction de transfert *H*(*z*). C'est la DTFT de la réponse impulsionnelle *h*[*n*]. De façon générale, on sépare l'amplitude et la phase.

Exemple

Tracer la réponse en fréquence de la fonction suivante :

$$H(z) = \frac{1}{1-3z^{-1}}$$

La première chose à faire est de remplacer $z = e^{j2\pi F}$:

Pour trouver l'amplitude il faut séparer les parties réelles et imaginaires :

$$H(z) = \frac{1}{1-3e^{-j2\pi F}} = \frac{1}{1-3(\cos(2\pi F) + j\sin(2\pi F))}$$

Et on trouve l'amplitude :

$$\left|H_p(F)\right| = \sqrt{\frac{1}{1-\cos(2\pi F)+9}}$$

Et la phase

$$\varphi(F) = tan^{-1}\left(\frac{1-\cos(2\pi F)}{3\sin(2\pi F)}\right)$$

IV.9 La transformée en *z* et l'analyse de systèmes

La transformée en *z* unilatérale est un outil utile pour analyser des systèmes linéaire qui sont décrits par des équations aux récurrences ou fonctions de transfert. La solution est plus simple dans le domaine *z* parce que la convolution devient une multiplication. Pour obtenir la réponse dans le temps, il faut faire la transformée inverse.

IV.9.1 Systèmes définis par une équation aux récurrences

Pour un système définit par une équation aux récurrences, la solution est basée sur la transformation de l'équation aux récurrences en utilisant les propriétés de la transformée en *z* et en appliquant les conditions initiales. On va ensuite faire la transformée inverse en utilisant l'expansion en fractions partielles.

Exemple

Soit un système définit par une équation de récurrence :

$$y(k+1) = 0.5\, y(k) + e(k)$$

L'entrée est un échelon unitaire avec $y(0) = 0$

Trouver la sortie $y(k)$.

Solution

La transformée en Z du système :

$$zY(z) - 0.5\, Y(z) = E(Z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{z - 0.5}\, E(z)$$

Si l'entrée est un échelon unitaire alors $E(z) = \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) = \frac{1}{(z - 0.5)}\, \frac{z}{z-1}$$

En décomposant en éléments simples :

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-1)(z-0.5)} = \frac{2}{z-1} - \frac{2}{z-0.5}$$

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z-0.5}$$

$$y(k) = 2 - 2(0.5)^k$$

IV.9.2 Systèmes définis par une fonction de transfert

La réponse $Y(z)$ d'un système est tout simplement la multiplication de l'entrée et du système, $Y(z) = X(z)\, H(z)$. Il est souvent plus facile de travailler avec la fonction de transfert que l'équation aux récurrences.

Exemple

Soit un système

$$H(z) = \frac{z}{z-2}$$

Calculer la réponse à l'entrée

$$x[k] = (2)^k u[k]$$

On transforme $x[k]$ dans le domaine z :

$$X(z) = \frac{z}{z-2}$$

Il faut ensuite multiplier $X(z)$ $H(z)$:

$$Y(z) = X(z)H(z) = \frac{z^2}{(z-2)^2}$$

Et à l'aide de la transformée inverse (propriété de déphasage et transformée),

$$y[k] = (k+1)(2)^k u[k]$$

Exercices sur le chapitre IV

Exercice N°1

Calculer la transformée en z de la fonction causale suivante :

k	0	1	2	3	4	5…∞
$x(k)$	1	4	6	4	1	0…0

Solution N°1

$$X(z) = 1 + 4z^{-1} + 6z^{-2} + 4z^{-3} + 1z^{-4} = z^{-4} \times (z+1)^4$$

$$X(z) = \left(\frac{z+1}{z}\right)^4$$

Exercice N°2

Calculer la transformée en z des fonctions suivantes.

1. $x(k) = \delta(k)u(k)$.
2. $x(k) = a^k u(k)$.
3. $x(k) = \sin k\omega T\, u(k)$.

Solution N°2

1. $x(k) = \delta(k)u(k)$

   $$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(k) \times z^{-k}$$

   $$X(z) = \delta(0) = 1$$

2. $x(k) = a^k u(k)$

$X(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k$ pour $\left|\frac{a}{z}\right| < 1$

$X(z) = \frac{z}{z-a}$

3. $x(k) = \sin k\omega T\, u(k)$.

$\sin k\omega T = \frac{e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}}{2j}$

$X(z) = \frac{1}{2j}\{z[e^{j\omega T}] - z[e^{-j\omega T}]\} = \frac{1}{2j}\left\{\frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{z}{z-e^{-j\omega T}}\right\}$

$X(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z\cos \omega T + 1}$

Exercice N°3

1. Trouver la fonction $f(k)$ l'origine de $F(z)$ par la méthode de décomposition en éléments simples :

$$F_1(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z-1)^2(z-2)}$$

2. Calculer la transformée en z inverse par la méthode de division des polynômes :

$$F_2(z) = \frac{-z + z^2}{2 + 3z + z^2}$$

Solution N°3

1. La méthode de décomposition en éléments simples :

$F_1(z) = \frac{z^3 - 2z^2 + 2z}{(z-1)^2(z-2)}$

$\frac{F_1(z)}{z} = \frac{z^2 - 2z + 2}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A_1}{(z-1)^2} + \frac{A_2}{z-1} + \frac{B}{z-2}$

$A_1 = -1;\ A_2 = -1; B = 2$

$F_1(z) = \frac{-z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{2z}{z-2}$

$f_1(k) = (-k - 1 + 2^{k+1})u(k)$

2. La méthode de division des polynômes

$F_2(z) = \frac{-z + z^2}{2 + 3z + z^2}$

$F_2(z) = 1 - 4z^{-1} + 10z^{-2} - 22z^{-3}$ ....

$f_2(k) = \delta(k) - 4\delta(k-1) + 10\delta(k-2) - 22\delta(k-3)$ ....

Exercice N°4

On considère un système échantillonné régi par la relation de récurrence suivante :

$$s_k = 0.5\, e_{k-1} - 0.6 s_{k-1}$$

1. Calculer la fonction de transfert en z de ce système.
2. Déterminer la valeur finale de l'échantillon de sortie, lorsque le signal d'entrée est un échelon unité.

Solution N°4

1. La fonction de transfert en z de ce système

   $s_k = 0.5\, e_{k-1} - 0.6 s_{k-1}$

   $\mathrm{S(z)} = 0.5z^{-1}E(z) - 0.6z^{-1}S(z)$

   $\mathrm{G(z)} = \frac{S(z)}{E(z)} = \frac{0.5\, z^{-1}}{1+0.6z^{-1}} = \frac{0.5}{z+0.6}$

2. La valeur finale de l'échantillon de sortie, lorsque le signal d'entrée est un échelon unité.

   Lorsqu'on injecte un échelon unité à l'entrée de ce système, on a :

   $S(z) = G(z) \times E(z) = \frac{0.5}{z+0.6} \times \frac{z}{z-1}$

   La valeur finale du signal de sortie est donc :

   $\lim_{k\to+\infty} s_k = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})S(z) = \lim_{z\to 1} \frac{0.5}{z+0.6} = 0.3125.$

Exercice N°5

On considère un système échantillonné de fonction de transfert :

$$G(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

1. Etablir la relation de récurrence entre les suites d'échantillons d'entrée et de sortie.
2. Calculer les 4 premiers échantillons de sortie lorsque le signal d'entrée est un échelon unité.

Solution N°5

$$G(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} + 0.25z^{-2}}$$

1. La relation de récurrence :

   $\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1 - z^{-1}}{1 - 0.25z^{-1} + 0.25z^{-2}}$

   $S(z)(1 - 0.25z^{-1} + 0.25z^{-2}) = E(z)(1 - z^{-1})$

D'où : $s_k - 0.25s_{k-1} + 0.25s_{k-2} = e_k - e_{k-1}$

2. Calcule des 4 premiers échantillons de sortie

$s_k = e_k - e_{k-1} + 0.25s_{k-1} - 0.25s_{k-2}$

Calculons les échantillons de sortie

k	0	1	2	3
e_k	1	1	1	1
s_k	1	0.25	-0.188	-0.69

Chapitre V

Modèles d'espace d'état en temps continu et discret

V.1 Représentation d'état des systèmes continus

V.1.1 Définitions

La représentation d'état permet de modéliser un système dynamique sous forme matricielle en utilisant des variables d'état. On se place alors dans un espace d'état. Cette représentation, qui peut être linéaire ou non-linéaire, doit rendre compte de l'état du système à n'importe quel instant futur si l'on possède les valeurs initiales. Cette représentation peut être continue ou discrète.

V.1.2 variables d'état

Un système peut être entièrement décrit à l'aide d'un ensemble de variables minimal. Les variables d'état sont des grandeurs physiques continues du système (elles doivent être dérivables) et doivent être indépendantes les unes des autres. Elles sont généralement rassemblées dans un vecteur *X*. La connaissance de toutes les variables d'état à un instant *t* doit permettre de connaître toutes les valeurs du système à un instant *t*+*dt*, cette représentation n'est pas unique, un même système peut être décrit avec des variables d'état différentes mais leur nombre est toujours le même. Ce nombre, désigné par la lettre *n*, représente l'ordre du système.

V.1.3 Modélisation des systèmes linéaires

Dans le cas général, le système peut avoir plusieurs entrées et plusieurs sorties. Soit *n* le nombre de variables d'état, *m* le nombre d'entrées et *p* le nombre de sorties. Dans ces conditions, la matrice de commande est toujours une matrice $n \times n$, mais, cette fois, [B] est une matrice $n \times m$ et [C] est une matrice $p \times n$. Pour être complet, il faut tenir compte d'une possible relation directe entre entrées et sorties. La matrice [D], de dimensions $m \times p$ représente ce lien. Signalons pour finir que les coefficients des différentes matrices peuvent être variables dans le temps.

On a alors :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A(t)]x(t) + [B(t)]e(t) \\ s(t) = [C(t)]x(t) + [D(t)]e(t) \end{cases}$$

La première équation s'appelle l'équation de commande. La seconde, équation d'observation. On adopte fréquemment la représentation schématique de la figure V.2 pour illustrer cette modélisation, dans cette représentation, les signaux sont en réalité des vecteurs.

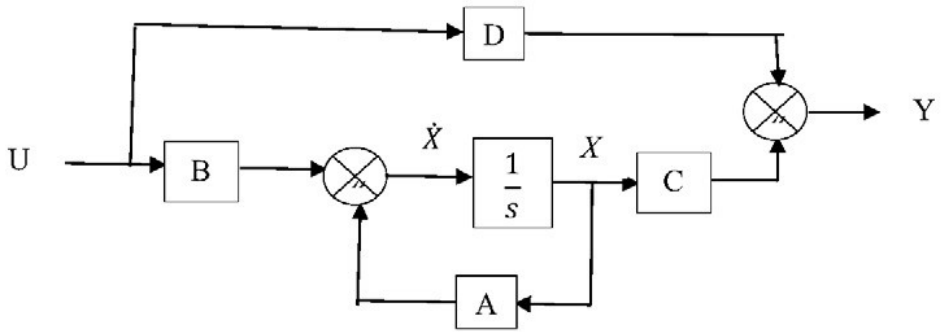


Figure V.2 Représentation schématique d'une modélisation d'état.

Si ces coefficients sont constants, le système est dit invariant et on a:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]e(t) \\ s(t) = [C]x(t) + [D]e(t) \end{cases}$$

V.1.4 Commandabilité d'un système

V.1.4.1 Définitions

Un système est dit commandable à l'instant t_1 s'il est possible de déterminer un signal d'entrée $e(t)$ sur l'intervalle $[t_1, t_2]$ de manière à amener le système de l'état $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}_1$ vers l'état $\mathbf{x}(t_2) = \mathbf{0}$.

Si un système est commandable quel que soit t_1, il est dit complètement commandable.

V.1.4.2 Critère de Kalman

Il existe de nombreux critères de commandabilité ou de non-commandabilité. Le critère de Kalman est l'un des plus couramment utilisés.

Un système est complètement accessible et complètement commandable si et seulement si les vecteurs (B), [A] (B), $[A]^2$ (B) , . . . , $[A]^{n-1}$ (B) sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice de commandabilité par la matrice formée des n vecteurs colonnes (B) , [A] (B) , $[A]^2$ (B) , . . . , $[A]^{n-1}$ (B) :

$$[C] = [(B) \quad [A](B) \quad [A]^2(B) \ldots [A]^{n-1}(B)]$$

La paire [A], (B) est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

Exemple 1

Soit le système régi par les équations d'état suivantes :

$\dot{x}(t) = [A]x(t) + (B)e(t)$

Avec :

$[A] = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ et $(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

La matrice de commandabilité est formée de deux vecteurs :

$[C] = [(B) \quad [A](B)]$

D'où:

$[C] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$

Cette matrice est bien de rang 2, étant donné que son déterminant n'est pas nul :

$\det [C] = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 9$

Le système est donc complètement commandable.

V.1.5 Observabilité de l'état d'un système

V.1.5.1 Définition

Un système est dit observable à un instant t_1, si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur un intervalle de temps $[t_1, t_2]$ permet de calculer l'état du système à l'instant t_1. Si un système est observable quel que soit l'instant t_1, il est dit complètement observable.

V.1.5.2 Critère d'observabilité

On considère un système défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A]x(t) + [B]e(t) \\ s(t) = [C]x(t) + [D]e(t) \end{cases}$$

Ce système est complètement observable si et seulement si les vecteurs lignes (C) , (C) [A] , (C) $[A]^2$, . . . , (C) $[A]^{n-1}$ sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice d'observabilité par la matrice formée des n vecteurs lignes (C), (C) [A] , (C) $[A]^2$, · · · , (C) $[A]^{n-1}$:

$$[O] = \begin{bmatrix} (C) \\ (C)[A] \\ (C)[A]^2 \\ \vdots \\ (C)[A]^{n-1} \end{bmatrix}$$

La paire [A], (C) est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

V.1.6 Relation entre la représentation d'état et la fonction de transfert d'un système

V.1.6.1 Représentation d'état à partir de la fonction de transfert

a) Représentation modale

Ce type de représentation, encore appelée représentation parallèle, convient particulièrement bien à la représentation d'un système dont la fonction de transfert est placée sous la forme d'une somme. Soit $G(s)$ sa fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha_1}{(s - s_1)} + \frac{\alpha_2}{(s - s_2)} + \cdots + \frac{\alpha_n}{(s - s_n)}$$

Cette écriture fait apparaître la somme de n fonctions de transfert. En appelant $X_i(s)$ la sortie du $i$ème bloc élémentaire, on a :

$$X_i(s) = \frac{1}{(s - s_i)} E(s) \Rightarrow \dot{x}_i = p_i x_i + e$$

Et

$$s(t) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$$

Soit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_n \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = (\alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n)\, x(t) \end{cases}$$

b) Représentation série

Ce type de représentation, convient particulièrement bien à la représentation d'un système dont la fonction de transfert est placée sous la forme d'un produit. Soit $G(s)$ sa fonction de transfert :

$$G(s) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{\alpha}{(s - s_1)(s - s_2) \ldots (s - s_n)}$$

Cette écriture fait apparaître la somme de n fonctions de transfert. En appelant $X_i(p)$ la sortie du $i^{ème}$ bloc élémentaire, on a :

$\dot{x}_i = p_i x_i + x_{i-1}$
Et

$s(t) = \alpha x_1$

Soit :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} s_1 & \cdots & 0 \\ 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & s_n \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} e(t) \\ s(t) = (0 \quad 0 \quad \ldots \quad \alpha)\, x(t) \end{cases}$$

V.1.6.2 Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert

On applique la transformation de Laplace aux équations d'état :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A\, x(t) + Be(t) \\ s(t) = C\, x(t) \end{cases}$$

Et on tire la fonction de transfert de système :

$G(s) = \frac{S(s)}{E(s)} = C(SI - A)^{-1}B$

V.2 Représentation d'état des systèmes à temps discret

V.2.1 Définition

Soient $u(k) = \begin{pmatrix} u1(k) \\ \ldots \\ um(k) \end{pmatrix}$ le vecteur de commande

$y(k) = \begin{pmatrix} y1(k) \\ \ldots \\ yp(k) \end{pmatrix}$ le vecteur des observations

$X(k) = \begin{pmatrix} x1(k) \\ \ldots \\ xn(k) \end{pmatrix}$ le vecteur d'état,

La représentation d'état d'un système discret prend la forme :

$$X(k+1) = AX(k) + Bu(k)$$
$$y(k) = CX(k) + Du(k)$$

- n est l'ordre du système
- en général, $D = 0$, on a un système « propre »
- si $B = 0$, système homogène, sans second membre
- A, matrice d'état, C matrice d'observation, B de commande.

V.2.2 Passage de l'équation différentielle à la représentation d'état

1/ Forme de commande :

Exemple 1

$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = u_n$ ou $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$

On pose : $X_k = \begin{pmatrix} x1(k) \\ x2(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_k \\ y_{k+1} \end{pmatrix}$

On a : $x1(k+1) = x2(k)$

$x2(k+1) = -3x2(k) - 2x1(k) + u_k$

Soit, $\begin{cases} X_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X_k \end{cases}$

Exemple 2

$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 4u_n - 3u_{n+1}$

Soit $\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{4 - 3z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{Y(z)}{X(z)} \frac{X(z)}{U(z)}$ avec

$\frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + 3z + 2}$ et $\frac{Y(z)}{X(z)} = 4 - 3z$, d'où l'on tire la représentation suivante (avec un vecteur d'état X différent) :

$\begin{cases} X_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \\ y_k = \begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix} X_k \end{cases}$

2/ Forme modale :

Pour obtenir une matrice d'état diagonale, on peut procéder en décomposant en éléments simples (si les pôles sont réels).

Exemple 3:

$y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 3u_{n+1}$

$D(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{3z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{az}{z+1} + \frac{bz}{z+2} = \frac{(a+b)z^2 + (2a+b)z}{(z+1)(z+2)}$

$= \frac{3z}{z+1} - \frac{3z}{z+2} = \frac{H1(z)}{U(z)} + \frac{H2(z)}{U(z)}$

En identifiant, il vient : $\frac{H1(z)}{U(z)} = \frac{3z}{z+1}$ et $\frac{H2(z)}{U(z)} = -\frac{3z}{z+2}$ ou les équations aux différences : $\begin{cases} h1(k+1) = -h1(k) + 3u_{k+1} \\ h2(k+1) = -2h2(k) - 3u_{k+1} \end{cases}$

Représentation matricielle : $\begin{cases} H_{k+1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} H_k + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} u_{k+1} \\ y_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} H_k \end{cases}$

V.2.3 Passage de la représentation d'état à la fonction de transfert en z

$$\begin{matrix} X_{k+1} = AX_k + Bu_k \\ y_k = CX_k \end{matrix} \xrightarrow{\ z\ } z(\tilde{X}(z) - X_0) = A\tilde{X}(z) + B\tilde{U}(z)$$

soit $\tilde{X}(z) = (zI - A)^{-1} B\tilde{U}(z)$ (avec I matrice identité) et $\tilde{Y}(z) = C\tilde{X}(z) = C(zI - A)^{-1} B\tilde{U}(z)$, d'où l'on tire: $D(z) = C(zI - A)^{-1}B$, matrice de transfert en z.

V.2.4 Solution de l'équation d'état discrète

$\begin{matrix} X_{k+1} = AX_k + Bu_k \\ y_k = CX_k \end{matrix}$ avec X_0 conditions initiales

La solution de l'équation d'état s'obtient par récurrence :

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0 + Bu_0 \\ X_2 &= AX_1 + Bu_1 = A^2X_0 + ABu_0 + Bu_1 \\ &\cdots \\ X_k &= A^kX_0 + A^{k-1}Bu_0 + \cdots ABu_{k-2} + Bu_{k-1} \end{aligned}$$

soit : $X_k = A^kX_0 + GU$

Le premier terme donne l'effet de la condition initiale X_0, le second celui de la commande ; le vecteur U regroupe toutes les valeurs de la commande.

V.2.5 Commandabilité d'un système à temps discret

La commandabilité des systèmes à temps discret s'étudie exactement de la même manière que pour les systèmes à temps continu.

V.2.5.1 Accessibilité

Un système est dit accessible à l'état $X(k_0)$ s'il est possible de déterminer une suite d'échantillons d'entrée $e(k)$ sur l'intervalle $[0, k_0 - 1]$ de manière à amener le système de état $X(0) = \mathbf{0}$ vers l'état $X(k_0)$.

Si un système est accessible quel que soit $X(k_0)$, il est dit complètement accessible.

Remarque : les notions d'accessibilité, de commandabilité et de gouvernabilité sont encore ici, généralement confondues.

V.2.5.2 Critère de commandabilité

Un système est complètement accessible et complètement commandable si et seulement si les vecteurs (B), $[A]$ (B), $[A]^2$ (B) , . . . , $[A]^{n-1}$ (B) sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice de commandabilité ou de gouvernabilité par la matrice formée des n vecteurs colonnes (B), $[A]$ (B), $[A]^2$ (B) , . . . ,$[A]^{n-1}$ (B) :

$$[C] = [(B) \quad [A](B) \quad [A]^2(B) \dots [A]^{n-1}(B)]$$

La paire [A], (B) est complètement commandable si et seulement si la matrice de commandabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

V.2.6 Observabilité de l'état d'un système

L'observabilité des systèmes à temps discret s'étudie exactement de la même manière que pour ceux à temps continu.

V.2.6.1 Définition

Un système est dit observable à un instant k_2T_e, si la connaissance du signal d'entrée et du signal de sortie sur un intervalle de temps $[k_1T_e, k_2T_e]$ permet de calculer l'état du système à l'instant k_2T_e.

Si un système est observable quel que soit l'instant k_2T_e, il est dit complètement observable.

V.2.6.2 Critère d'observabilité

Le critère d'observabilité est légèrement différent pour les systèmes à temps discret.

Un système est complètement observable si et seulement si les vecteurs colonnes $(C)^T, [A^T](C)^T, [A^T]^2(C)^T, \dots, [A^T]^{n-1}(C)^T$ sont linéairement indépendants.

Cet énoncé peut se traduire également de la manière suivante : on définit la matrice d'observabilité par la matrice formée des n vecteurs colonnes $(C)^T, [A^T](C)^T, [A^T]^2(C)^T, \dots, [A^T]^{n-1}(C)^T$

$$[O] = [(C)^T, [A^T](C)^T, [A^T]^2(C)^T, \dots, [A^T]^{n-1}(C)^T]$$

La paire $[A]$, (C) est complètement observable si et seulement si la matrice d'observabilité est régulière, autrement dit si son déterminant n'est pas nul.

V.2.6.3 Exemple

Considérons un système régi par les équations :

$$\begin{cases} x(k+1) = [A]x(k) + (B)e(k) \\ s(k) = (C)x(k) \end{cases}$$

Avec

$[A] = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *et* $(C) = (1 \quad -1)$

La matrice d'observabilité est définie par :

$[O] = [(C)^T, [A^T](C)^T]$

$[O] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow det\ [O] = -1$

Le système est donc complètement observable.

Exercices sur le chapitre V

Exercice N°1

Déterminer les fonctions de transfert à partir des représentations d'état suivantes :

1. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u; \qquad y = [0 \quad 1]\, x.$
2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \qquad y = [1 \quad 1]\, x.$

Solution N°1

1. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u; \qquad y = [0 \quad 1]\, x.$

$\mathrm{G(s)} = \mathrm{C}(sI - A)^{-1}B + D$

$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2-1}\begin{pmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s-1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{G(s)} = \frac{1}{s+1}$

2. $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u; \qquad y = [1 \quad 1]\, x.$

$\mathrm{G(s)} = \mathrm{C}(sI - A)^{-1}B + D$

$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s(s+2)+1}\begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ -1 & s \end{pmatrix}$

$G(s) = \frac{1}{s+1}$

Exercice N°2

Soient les fonctions de transfert suivantes :

$$G_1(s) = \frac{20}{s\,(s+1)(s+4)}$$

$$G_2(s) = \frac{10}{s\,(s+2)(s-1)^2}$$

Proposer une représentation d'état pour chaque fonction de transfert.

Solution N°2

1. $G_1(s) = \frac{20}{s\,(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+4} = \frac{5}{s} - \frac{20}{3}\frac{1}{s+1} + \frac{5}{3}\frac{1}{s+4}$

$$\mathrm{Y(s)} = 5\frac{E(s)}{s} - \frac{20}{3}\frac{E(s)}{s+1} + \frac{5}{3}\frac{E(s)}{s+4}$$

On choisit les variables d'états :

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{1}{s}E(s) \\ X_2(s) = \frac{1}{s+1}E(s) \\ X_3(s) = \frac{1}{s+4}E(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = e \\ \dot{x}_2 = -x_2 + e \\ \dot{x}_3 = e - 4x_3 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e$$

$$\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{20}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2. $G_2(s) = \frac{10}{s\,(s+2)(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C_1}{(s-1)^2} + \frac{C_2}{s-1}$

$$\mathrm{Y(s)} = 5\frac{E(s)}{s} - \frac{5}{9}\frac{E(s)}{s+2} + \frac{10}{3}\frac{E(s)}{(s-1)^2} - \frac{40}{9}\frac{E(s)}{s-1}$$

Les variables d'états :

$$\begin{cases} X_1(s) = \frac{E(s)}{s} \\ X_2(s) = \frac{E(s)}{s+2} \\ X_3(s) = \frac{E(s)}{s-1} \\ X_4(s) = \frac{E(s)}{(s-1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = e \\ \dot{x}_2 = e - 2x_2 \\ \dot{x}_3 = e + x_3 \\ \dot{x}_4 = x_3 + x_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e$$

$$\mathrm{y} = \begin{pmatrix} 5 & -\frac{5}{9} & -\frac{40}{9} & \frac{10}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Exercice N°3

On considère un système régi par l'équation d'état :

$$\begin{cases} x(k+1) = [A]x(k) + (B)e(k) \\ s(k) = (C)x(k) \end{cases}$$

Avec : $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $(B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $(C) = (1 \quad 0)$

Calculer la fonction de transfert de ce système.

Solution N°3

La fonction de transfert

$$\mathrm{G(z)} = (\mathrm{C})(zI - A)^{-1}(B)$$

$$(zI - A)^{-1} = \frac{1}{(z+1)(z-3)} \times \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{G(z)} = \frac{1}{(z+1)(z-3)} (1 \quad 0) \begin{bmatrix} z-1 & 2 \\ 2 & z-1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{z-3}$$

Exercice N°4

Trouver la représentation d'état parallèle et série du ce système

$$G(z) = \frac{1}{(z+2)(z-4)(z+3)}$$

Solution N°4

La représentation d'état parallèle :

$$G(z) = \frac{1}{(z+2)(z-4)(z+3)} = \frac{A}{z+2} + \frac{B}{z-4} + \frac{C}{z+3}$$

$$A = -\frac{1}{6}; B = \frac{1}{42}; C = \frac{1}{7}$$

$$S(z) = -\frac{1}{6}\frac{E(z)}{z+2} + \frac{1}{42}\frac{E(z)}{z-4} + \frac{1}{7}\frac{E(z)}{z+3}$$

$$\begin{cases} X_1(z) = \frac{1}{z+2}E(z) \\ X_2(z) = \frac{1}{z-4}E(z) \\ X_3(z) = \frac{1}{z+3}E(z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = 2x_1(k) + e(k) \\ x_2(k+1) = 4x_2(k) + e(k) \\ x_3(k+1) = 3x_3(k) + e(k) \end{cases}$$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e(k)$$

$$s(k) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{42} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} x(k)$$

La représentation d'état série :

$$\frac{S(z)}{E(z)} = \frac{1}{(z+2)(z-4)(z+3)}$$

$$\mathrm{S(z)} = \frac{E(z)}{(z+2)(z-4)(z+3)}$$

$$\begin{cases} X_1(z) = \frac{E(z)}{z+2} \\ X_2(z) = \frac{E(z)}{(z+2)(z-4)} \\ X_3(z) = \frac{E(z)}{(z+2)(z-4)(z+3)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = -2x_1(k) + e(k) \\ x_2(k+1) = x_1(k) + 4x_2(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) - 3x_3(k) \end{cases}$$

$$x(k+1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e(k)$$

$$s(k) = (0 \quad 0 \quad 1)\, x(k)$$

Bibliographie

1- Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état. (Yves Granjon) 2éme Edition Editions DUNOD.

2- Cours STI tc2 Traitement du signal, Département Automatique, école centrale LYON 2012-2013.

3- arzelier@laas.fr// http ://www.laas.fr/~arzelier (cours Asservissement)

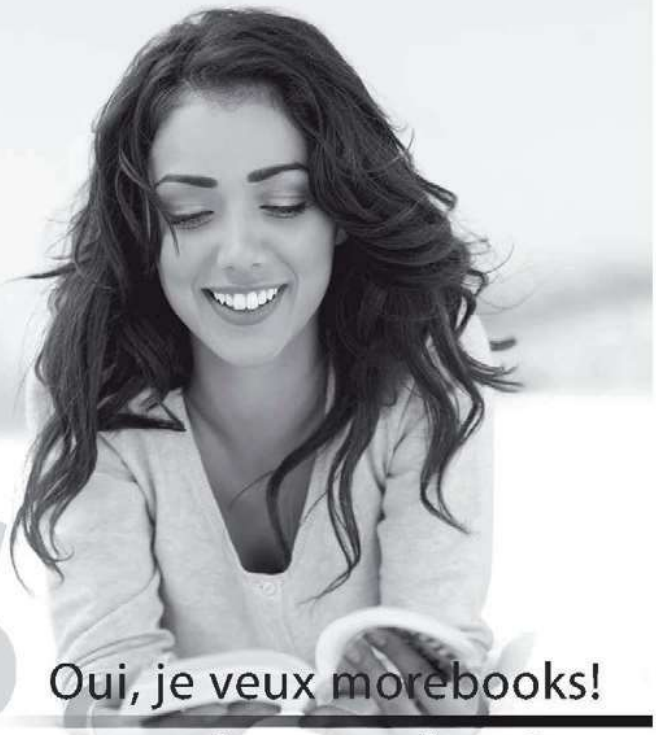
4- Commande des processus : Asservissements numériques (S. TLIBA, M. JUNGERS, Y. CHITOUR) Université Paris-Sud XI - ENS de Cachan.

5- Commande numérique des systèmes, (G. Iuliana Bara, Bernard Bayle et Jacques Gangloff), Ecole nationale supérieure de physique de Strasbourg. 2010-2011.

6- Asservissement des systèmes linéaires à temps continu, (Edouard Laroche, Houssem Halalchi), université de Strasbourg, 2009-2010.

7- B.P. Lathy, Linear Systems and Signals, Berkeley-Cambridge Press, 1992

More Books!



yes

Oui, je veux morebooks!

I want morebooks!

Buy your books fast and straightforward online - at one of the world's fastest growing online book stores! Environmentally sound due to Print-on-Demand technologies.

Buy your books online at

www.get-morebooks.com

Achetez vos livres en ligne, vite et bien, sur l'une des librairies en ligne les plus performantes au monde!
En protégeant nos ressources et notre environnement grâce à l'impression à la demande.

La librairie en ligne pour acheter plus vite

www.morebooks.fr

OmniScriptum Marketing DEU GmbH
Bahnhofstr. 28
D - 66111 Saarbrücken
Telefax: +49 681 93 81 567-9

info@omniscriptum.com
www.omniscriptum.com

OMNIScriptum